Wenn man lineare Funktionen untersuchen will, muss man zunächst einmal wissen, was eigentlich eine Funktion ist. Hier die mathematische Definition:

> Eine Funktion ist eine Zuordnung, bei der jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zugeordnet wird.

Da steckt schon eine Menge Mathematik drin, die man insbesondere auch falsch verstehen kann. Ich versuche mal zu übersetzen.

Wir haben zunächst den Definitionsbereicht. In der Schule ist dieser immer eine Zahlenmenge, meist die reellen Zahlen (manchmal muss man aber auch Zahlen herausnehmen, z.B. bei gebrochenrationalen Funktionen).

Wir wählen also eine beliebige Zahl aus und könne nun die eine (es kann nur eine geben ... das bedeutet **genau eine**) ihr zugeordnete Zahl des Wertebereichs bestimmen, wenn wir eine Funktionsgleichung haben.

Beispiel:

$$f(x) = 2x - 4$$

Wählen wir zum Beispiel die 3 aus dem Definitionsbereich aus, so müssen wir diese für x einsetzten und erhalten so die der 3 zugeortnete Zahl aus dem Wertebereich (der hier ebenfalls aus den reellen Zahlen besteht).

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Die zugeordnete Zahl ist also 2. Wir können dies nun in einem Koordinatensystem veranschaulichen, also den Punkt (3|2) eintragen. Er gehört zum Graphen der Funktion f.

Dasselbe können wir mit beliebig vielen anderen Zahlen des Definitionsbereichs machen. Ich habe das in der folgenden Tabelle einmal gemacht:

x	*Rechnung*	$f(x)$
-2	$2 \cdot (-2) - 4$	-8
-1	$2 \cdot (-1) - 4$	-6
0	$2 \cdot 0 - 4$	-4
1	$2 \cdot 1 - 4$	-2
2	$2 \cdot 2 - 4$	0
3	$2 \cdot 3 - 4$	2

Selbstverständlich kann man prinzipiell alle Zahlen, also auch Brüche, Dezimalzahlen und Wurzeln für x einsetzten. Beim Erstellen einer Wertetabelle ist das allerdings eher lästig, weil man dadurch mehr Rechenaufwand hat, und beim Einzeichnen ins Koordinatensystem werden dann sowieso die gerundeten Werte verwendet.

Beim Betrachten der Wertetabelle fällt auf, dass die Funktionswerte (das sind die in der rechten Spalte) um 2 größer werden, wenn x um 1 größer wird. Das ist natürlich kein Zufall: Die Zahl $2 \cdot (x+1)$ ist immer um 2 größer als die Zahl $2 \cdot x$, denn wenn man die Klammer auflöst, gilt ja gerade: $2 \cdot (x+1) = 2x + 2 \cdot 1 = 2x + 2$
Erhöht man x um 2 (oder 3 ...), erhöht sich $f(x)$ entsprechend um $2 \cdot 2$ ($3 \cdot 2$...)
Entsprechendes gilt natürlich für jede andere Zahl als die 2 auch.

Diesen Zusammenhang nutzen wir aus, wenn wir umgekehrt aus 2 gegebenen Punkten die Funktionsgleichung ermitteln wollen.

Beispiel:
Gegeben sind die Punkte $P_1(5|2)$ und $P_2(11|6)$. Wir erkennen das die x-Werte dieser Punkte um 6 unterscheiden, die y-Werte unterscheiden sich um 4. Beide werden größer von P_1 zu P_2, die Gerade steigt also an.

Jetzt kann man quasi den Dreisatz anwenden: Wenn x um 6 ansteigt, steigt y um 4 an, wenn also x um 1 ansteigt, steigt y um $4 : 6$ an, also um $\frac{2}{3}$.

Letzteres ist der Faktor vor meinem x in der Funktionsgleichung. Was wir gerechnet haben, können wir folgendermaßen zusammenfassen (die Steigung, also den Faktor vor dem x, bezeichnen wir mit m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Das sieht für den einen oder anderen vielleicht gefährlich aus, ist aber in Formelschreibweise genau das, was wir oben gemacht haben. Mit x_1 ist die x-Koordinate des Punktes P_1 gemeint, usw.

Jetzt müssen wir noch den y-Achsenabschnitt n bestimmen. Das ist aber ein Kinderspiel, denn wir wissen ja, dass die Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden liegen. Beide müssen die Funktionsgleichung erfüllen; damit ist gemeint: wenn man die x-Koordinate für x einsetzt, muss die y-Koordinate herauskommen. Wir können uns sogar noch aussuchen, welchen Punkt wir nehmen, bei beiden muss das gleiche herauskommen. Da wir schon die halbe Funktionsgleichung haben ($f(x) = \frac{2}{3} \cdot x + n$), gilt

$$2 = \frac{2}{3} \cdot 5 + n = \frac{10}{3} + n \Leftrightarrow n = 2 - \frac{10}{3} = \frac{6}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$$

Somit gilt insgesamt: $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{4}{3}$. Wir machen die Probe mit P_2: $\frac{2}{3} \cdot 11 - \frac{4}{3} = \frac{22}{3} - \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6$. Probe korrekt.